Frenet 标架

对弧长参数 s 下的曲线 $\boldsymbol{r}(s)$，用 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 表示 $\boldsymbol{r}$ 在 s 处的切向量，以区别一般参数与弧长参数. 弧长参数在形式上一般有更简洁的表达，下面先给出弧长参数下的 Frenet 标架.

定义 1 (单位切向量). 记 $\boldsymbol{t}(s) = \dot{\boldsymbol{r}}(s)$，则 $\boldsymbol{t}(s)$ 是模为 1 的切向量，称为 $\boldsymbol{r}$ 在 s 处的**单位切向量**.

定义 2 (曲率向量). 由于 $|\boldsymbol{t}(s)| = 1$，于是 $\boldsymbol{t}(s) \perp \dot{\boldsymbol{t}}(s)$，称 $\dot{\boldsymbol{t}}(s) = \ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ 为 $\boldsymbol{r}$ 在 s 处的**曲率向量**.

定义 3 (主法向量). 记

$$\boldsymbol{n}(s) = \frac{\dot{\boldsymbol{t}}}{|\dot{\boldsymbol{t}}|} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|},$$

称为 $\boldsymbol{r}$ 在 s 处的**主法向量**.

注. *主法向量即与曲率向量同向的单位向量. 当 $\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$ 即 $|\ddot{\boldsymbol{r}}| = 0$ 时，无法唯一确定 $\boldsymbol{n}(s)$.*

定义 4 (副法向量). 单位切向量与主法向量的外积

$$\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$$

称为 $\boldsymbol{r}$ 在 s 处的**副法向量**或**从法向量**.

定义 5 (Frenet 标架). 正交标架 $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ 称为曲线 $\boldsymbol{r}$ 在 s 处的 **Frenet 标架**.

注. *Frenet 标架的选取与参数无关.*

定义 6. 切向量、主法向量、副法向量所在的直线分别称为曲线的**切线**、**主法线**和**副法线**. 称主法向量与副法向量张成的平面为**法平面**，切向量与主法向量张成的平面为**密切平面**，切向量与副法向量张成的平面为**从切平面**.

注. *密切平面的几何解释：设曲线上一点 P 的切线为 L，当曲线上另一点 Q 趋近 P 时，Q 与 L 所在的平面趋近于 P 的密切平面.*

下面讨论一般参数下的 Frenet 标架.

设曲线 $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，有

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|},$$

因为 $|\boldsymbol{r}'|$ 不一定是常数，于是 $\boldsymbol{r}'$ 不一定与 $\boldsymbol{r}''$ 垂直，而 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 同向，那么 $\boldsymbol{r}''$ 不一定与 $\boldsymbol{t}$ 垂直. 但有下述命题.

命题 1. $\boldsymbol{r}''$ 在 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 张成的平面内.

证明. 设 s 为曲线 C 同定向的弧长参数，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},$$

即

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}'\cdot\dot{t}.$$

两边对 s 求导，得

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}'\cdot\dot{t}+\boldsymbol{r}'\cdot\ddot{t}=\boldsymbol{r}''\cdot(\dot{t})^2+\boldsymbol{r}'\cdot\ddot{t}.$$

移项，得

$$\boldsymbol{r}''\cdot(\dot{t})^2=\ddot{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}'\cdot\ddot{t}.$$

其中 $\ddot{\boldsymbol{r}}\,/\!/\,\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{r}'\,/\!/\,\boldsymbol{t}$，于是 $\boldsymbol{r}$ 为 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的线性组合，即在 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 张成的平面内. □

命题 2. $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向.

证明.

$$\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=(\boldsymbol{r}'\cdot\dot{t})\times(\boldsymbol{r}''\cdot(\dot{t})^2+\boldsymbol{r}'\cdot\ddot{t})=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\cdot(\dot{t})^3.$$

而 $\dot{t}$ 是大于 0 的常数，于是 $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向. □

于是，有

$$\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}.$$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}.$$

推论 1. $\boldsymbol{r}'$ 与 $\boldsymbol{r}''$ 张成的平面为密切平面.